第３講　場合の数・確率

1　数字 1 が書かれたカードが 4 枚，数字 2 が書かれたカードが 2 枚，数字 5 が書かれたカードが 2 枚，合計 8 枚のカードがある。

(1)　8 枚のカードを一列に並べて 8 桁の整数をつくる。

このときできる 8 桁の整数の個数は全部で [アイウ] 個である。さらに，次の条件(＊)が満たされるときにできる 8 桁の整数を考える。

(＊)　数字 1 が書かれた 4 枚のカードのどの 2 枚のカードも隣り合わない。

この条件(＊)は，例えば，[1][2][1][5][1][2][1][5] のとき満たされる。条件(＊)が満たされるときにできる 8 桁の整数の個数は全部で [エオ] 個である。

(2)　一般に，事象 A の確率を $P(A)$ で表す。また，二つの事象 A，B の積事象を $A\cap B$ と表す。

8 枚のカードからでたらめに 3 枚を取り出して袋に入れるという試行を T_1 とし，さらに，その 3 枚のカードが入った袋からでたらめに 1 枚のカードを取り出すという試行を T_2 とする。

試行 T_1 において，袋の中の数字 5 が書かれたカードの枚数が 0 枚である事象を A_0，1 枚である事象を A_1，2 枚である事象を A_2 とすると

$$P(A_0)=\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}},\quad P(A_1)=\frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サシ}}},\quad P(A_2)=\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セソ}}}$$

である。

（次ページに続く）

　試行 T_2 において数字 5 が書かれたカードが取り出されるという事象を B とすると

$$P(A_1 \cap B) = \frac{\boxed{タ}}{\boxed{チツ}},\quad P(A_2 \cap B) = \frac{\boxed{テ}}{\boxed{トナ}}$$

である。

　以上のことから，試行 T_2 において数字 5 が書かれたカードが取り出されたとき，袋の中にもう 1 枚の数字 5 が書かれたカードが入っている条件付き確率は $\dfrac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}$ である。

2

[1]　壺（つぼ）の中に１から４までの数字が一つずつ書かれた４枚のカードが入っている。この壺からカードを１枚取り出し，その数字を見てもとの壺に戻す試行を行う。

(1)　この試行を２回行うとき，２回続けて数字１が取り出される確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$ であり，２回続けて奇数の数字が取り出される確率は $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

(2)　この試行を４回行うとき，数字１が少なくとも２回取り出される確率は $\dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{クケコ}}}$ である。

(3)　この試行を繰り返すとき，１回目から４回目までに取り出された数字に，１から４までのすべての数字が現れる確率は $\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シス}}}$ である。また，４回繰り返してもどれかの数字が現れないという条件のもとで，更に，もう１度試行を行うと１から４までのすべての数字が現れる条件つき確率は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$ である。

［2］　壺を 3 個用意し，そのうち 2 個の壺には，それぞれ，1 から 4 までの数字が一つずつ書かれた 4 枚のカードが入っている。残りの 1 個の壺には，数字 1 の書かれたカードが 2 枚，数字 2，3 の書かれたカードがそれぞれ 1 枚入っている。はじめの 2 個の壺を A 型の壺，残り 1 個の壺を B 型の壺と呼ぶ。ただし，これらの壺は外から見て区別できない。

これら 3 個の壺から 1 個をでたらめに選び，更にそこからカードを 1 枚取り出しその数字を記録してもとの壺に戻す，という試行を行う。

この試行を 2 回反復したところ，取り出された数字が 2 回とも 1 であった。このとき 1 回目に選んだ壺が B 型であった条件つき確率は $\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である。

第３講　場合の数・確率

[1] (1)　同じものを含む順列の総数より，8 桁の整数の個数は $\dfrac{8!}{4!2!2!}=\dfrac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{2\cdot1\cdot2\cdot1}=420$ (個)

[2][2][5][5] の 4 枚のカードの並べ方は $\dfrac{4!}{2!2!}=6$ 通り。このそれぞれについて，4 枚のカードの間または両端の 5 カ所から異なる 4 カ所を選んで，残りの 1 のカードを入れる方法は ${}_5C_4=5$ 通り。

よって，条件(＊)が満たされるときにできる 8 桁の整数の個数は $6\times5=30$ (個)

(2)　8 枚のカードをすべて区別すると，8 枚から 3 枚を取り出す方法は ${}_8C_3$ 通り。

5 が 0 枚である取り出し方は，5 以外の 6 枚から 3 枚を取り出す場合で ${}_6C_3$ 通り。

よって　$P(A_0)=\dfrac{{}_6C_3}{{}_8C_3}=\dfrac{\dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}}{\dfrac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}}=\dfrac{5}{14}$

5 が 1 枚である取り出し方は，5 の選び方が 2 通り，他の 2 枚の選び方が ${}_6C_2$ 通り。

よって　$P(A_1)=\dfrac{2\times{}_6C_2}{{}_8C_3}=\dfrac{2\times\dfrac{6\cdot5}{2\cdot1}}{\dfrac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}}=\dfrac{15}{28}$

5 が 2 枚である取り出し方は，5 の選び方が 1 通り，残り 1 枚の選び方が 6 通り。

よって　$P(A_2)=\dfrac{1\times6}{{}_8C_3}=\dfrac{6}{\dfrac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}}=\dfrac{3}{28}$

$A_1\cap B$ は，試行 T_1 で 5 を 1 枚取り出し，試行 T_2 で 3 枚が入った袋の中からその 5 を取り出す場合で

$$P(A_1\cap B)=\frac{15}{28}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{28}$$

$A_2\cap B$ は，試行 T_1 で 5 を 2 枚取り出し，試行 T_2 で 3 枚が入った袋の中から 2 枚ある 5 のうち 1 枚を取り出す場合で

$$P(A_2\cap B)=\frac{3}{28}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{14}$$

T_2 で 5 が取り出される事象は，T_1 で 5 を 1 枚または 2 枚取り出し，T_2 で 5 を取り出す場合で，その確率は $P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)$ である。またそのときに，袋の中にもう 1 枚の 5 が入っている事象は $A_2\cap B$ であるから，求める条件付き確率は

$$\frac{P(A_2\cap B)}{P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)}=\frac{\dfrac{1}{14}}{\dfrac{5}{28}+\dfrac{1}{14}}=\frac{2}{7}$$

[2] [1]　(1)　2 回の数字の出方は，全部で 4×4 通り。

2 回続けて 1 が取り出される場合の数は，1×1 通り。

よって，2 回続けて 1 が取り出される確率は，$\dfrac{1\times1}{4\times4}=\mathbf{\dfrac{1}{16}}$

また，2 回続けて奇数が取り出される場合の数は，2×2 通り

よって，2 回続けて奇数が取り出される確率は，$\dfrac{2\times2}{4\times4}=\mathbf{\dfrac{1}{4}}$

(2)　1 回の試行で数字 1 が取り出される確率は $\dfrac{1}{4}$，それ以外の数字が取り出される確率は $\dfrac{3}{4}$

4 回の試行において，数字 1 が 1 回のみ取り出される確率は

${}_4C_1\left(\dfrac{1}{4}\right)\left(\dfrac{3}{4}\right)^3=\dfrac{4\times3^3}{4^4}$ であり，数字 1 が 1 回も取り出されない確率は

$\left(\dfrac{3}{4}\right)^4=\dfrac{3^4}{4^4}$ である.

よって，数字 1 が少なくとも 2 回取り出される確率は,

$$1-\left(\frac{4\times3^3}{4^4}+\frac{3^4}{4^4}\right)=1-\frac{108+81}{4^4}=1-\frac{189}{256}=\mathbf{\frac{67}{256}}$$

(3)　1 回目から 4 回目までに取り出された数字に 1 から 4 までのすべての数字が現れる場合の数は, 1, 2, 3, 4 の 4 つの数字の順列を考えて, $4!=4\times3\times2\times1$ 通り

よって，その確率は，$\dfrac{4\times3\times2\times1}{4^4}=\mathbf{\dfrac{3}{32}}$

　4 回繰り返してもどれかの数字が現れない事象を A，5 回の試行で 1 から 4 までのすべての数字が現れる事象を B とすると，求める条件付き確率は $P_A(B)$ である.

事象 A は，4 回までに取り出した数字が

(i) 1 種類　　(ii) 2 種類　　(iii) 3 種類

のとき.

(i)のとき，4 通り

(ii)のとき，${}_4C_2\times(2^4-2)=6\times(16-2)=84$ 通り

(iii)のとき，${}_4C_3\times3\times\dfrac{4!}{2!}=144$ 通り

よって，4 回繰り返してもどれかの数字が現れない確率は,

$$P(A)=\frac{4+84+144}{4^4}=\frac{29}{32}$$

また，事象 $A\cap B$ は，(iii)かつ 1 回目から 4 回目に出ていない数字が 5 回目に出る場合で，5 回目の数字は 1 通りに決まる．よって，$P(A\cap B)=\dfrac{144\times1}{4^5}=\dfrac{9}{64}$

したがって，$P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{9}{64}}{\frac{29}{32}}=\mathbf{\dfrac{9}{58}}$

[2]　この試行を1回行ったときに1が出るのは，3つの壺からA型の壺を選び，そこから1を選ぶとき，または3つの壺からB型の壺を選び，そこから1を選ぶ場合である．

よってその確率は，$\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{3}$

したがって，2回反復したとき，2回とも1が出る確率は，$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$

また，1回目にB型の壺を選び，そこから1を選び，2回目に壺の型に関わらず1が出る確率は，$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{4}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{18}$

よって，求める条件付き確率は，$\dfrac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{9}}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$